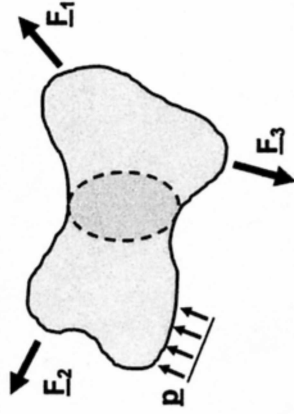
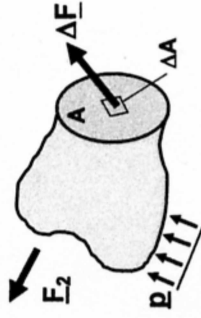


Definition der Spannung bei beliebiger Belastung

- Bei beliebig geformten und beliebig belasteten Körpern ist die Definition der Spannung für Stäbe ($\sigma = N/A$) nicht mehr zu gebrauchen.
- Statt dessen gelangt man dann wie folgt zu einer allgemeingültigeren Spannungsdefinition:



- man schneidet den Körper gedanklich in der zu untersuchenden Querschnittsfläche A auf und betrachtet einzelne Flächenelemente dA:



- Auf jedes Flächenelement dA wirkt dabei eine Schnittkraft $\Delta \underline{F}$ (auf die gegenüberliegende Schnittflächen wegen actio = reactio die Teilkraft $-\Delta \underline{F}$)

Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

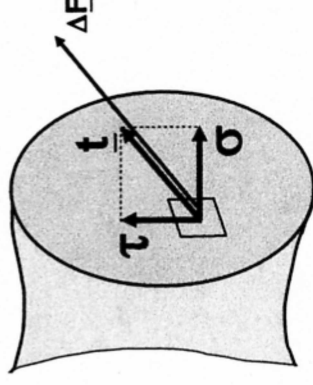
Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/1

Definition der Spannung bei beliebiger Belastung

- Der **Spannungsvektor** $\underline{t}$ wird nun definiert, indem man die ΔA 's infinitesimal klein wählt:

$$\underline{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{F}}{\Delta A} = \frac{d\underline{F}}{dA} \quad (9.1)$$

- Die Komponente von $\underline{t}$, die senkrecht auf dA steht, wird als **Normalspannung** σ bezeichnet, die Komponente, die in der Schnittflächen liegt, als **Schubspannung** τ :



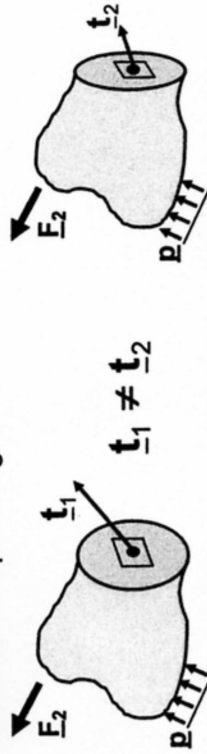
- Im allgemeinen Belastungsfall sind $\Delta \underline{F}$ und $\underline{t}$ (mit σ und τ) von dA zu dA unterschiedlich (beim Stab war $\Delta \underline{F}$ außer an Kerben u.ä. in jedem dA eines Querschnitts gleich, außerdem ist dort $\tau = 0$)

Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/2

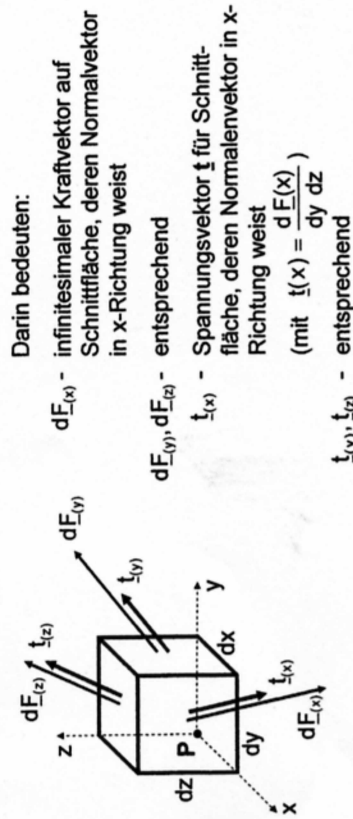
Definition der Spannung bei beliebiger Belastung

- Legt man jedoch bei gleicher Belastung durch den gleichen Punkt P eine *andere* geneigte Schnittfläche, so erhält man einen *anderen* Spannungsvektor:



- Es läßt sich zeigen, daß zur Beschreibung des kompletten Spannungszustandes in einem Punkt P die Angabe (bzw. Kenntnis) der Spannungsvektoren in 3 aufeinander senkrecht stehenden Schnittflächen erforderlich ist:

- Infinitesimales Volumen in der Umgebung von P:



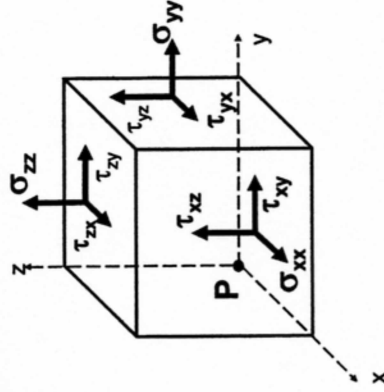
Durch Angabe von $\vec{t}_{(x)}$, $\vec{t}_{(y)}$ und $\vec{t}_{(z)}$ ist der Spannungszustand eindeutig beschrieben.

Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/3

Definition der Spannung bei beliebiger Belastung

- Darstellung der $\vec{t}$'s mittels ihrer Komponenten:



$$\text{mit } \vec{t}_{(x)} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} ; \quad \vec{t}_{(y)} = \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} ; \quad \vec{t}_{(z)} = \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} ;$$

- Dabei bedeuten:

1. Index: Kennzeichnung der Schnittfläche (charakterisiert durch Richtung des Normalvektors)

2. Index: Richtung der Spannungskomponente

Dabei wird aufgrund der Eindeutigkeit bei den Normalspannungen häufig der zweite Index weggelassen:

$$\sigma_{xx} \rightarrow \sigma_x, \sigma_{yy} \rightarrow \sigma_y, \sigma_{zz} \rightarrow \sigma_z$$

Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/4

Definition der Spannung bei beliebiger Belastung	
➤ Vorzeichendefinition: Positive Spannungen zeigen an einem positiven (negativen) Schnittpuffer in positive (negative) Koordinatenrichtung. ➤ Weiterhin bedeuten damit σ_x (bzw. σ_y, σ_z) > 0 eine Zugspannung in die entsprechende Richtung, σ_x (bzw. σ_y, σ_z) < 0 eine Druckspannung ➤ Die drei Vektoren $\underline{t}_{(x)}$, $\underline{t}_{(y)}$ und $\underline{t}_{(z)}$ werden im Spannungstensor zusammengefaßt, der den Spannungszustand in einem Punkt folglich vollständig beschreibt:	$\sigma = \begin{pmatrix} \underline{t}_{(x)}^t \\ \underline{t}_{(y)}^t \\ \underline{t}_{(z)}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (9.2)$ Hinweise: 1.) der hochgestellte Index t kennzeichnet den transponierten Vektor; 2.) Sind alle Komponenten bekannt, lassen sich (wie später gezeigt wird) auch die Spannungen in schräg liegenden Schnittflächen bestimmen.
Technische Mechanik I 9. Der Spannungszustand	Prof. Dr.-Ing. J. Harder 9/5

Definition der Spannung bei beliebiger Belastung	
• Der Satz von den zugeordneten Schubspannungen: ➤ Schubspannungen mit gleichen Indizes sind gleich: $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (9.3)$	
➤ Damit ist der Spannungstensor stets symmetrisch: $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (9.4)$	
➤ (Beweis durch Bildung und Auswertung der Momentengleichgewichte um die drei Koordinatenachsen für das obige infinitesimale Volumenelement) ➤ Aufgrund der Symmetrie von $\underline{\sigma}$ wird der Spannungszustand in einem Punkt also durch 6 unabhängige Komponenten beschrieben	
Technische Mechanik I 9. Der Spannungszustand	Prof. Dr.-Ing. J. Harder 9/6

Der ebene Spannungszustand (ESZ)

- Im folgenden soll der Sonderfall der ebenen Spannungszustandes (ESZ) betrachtet werden, der z.B. mit guter Näherung in Scheiben auftritt (zur Erinnerung: Scheiben sind ebene Tragwerke geringer Dicke, die nur in der Scheibenebene belastet sind)
- Bei einem ebenen Spannungszustand sind alle Spannungskomponente in der 3.Dimension (in der Regel die z-Richtung) Null:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

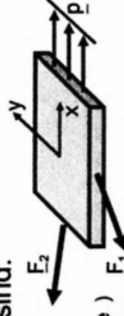
- Der Spannungstensor kann dann zweidimensional geschrieben werden:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad \text{für ESZ} \quad (9.5)$$

- In dünnen Scheiben kann dabei außerdem mit guter Genauigkeit angenommen werden, daß die verbleibenden Komponenten über der Dicke konstant sind und nur von der Lage in der Scheibe abhängen; d.h. $\sigma = \underline{\underline{\sigma}}(x, y)$ bzw.

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y),$$

wenn x und y-Achse die in der Scheibenebene liegenden Koordinatenachsen sind:



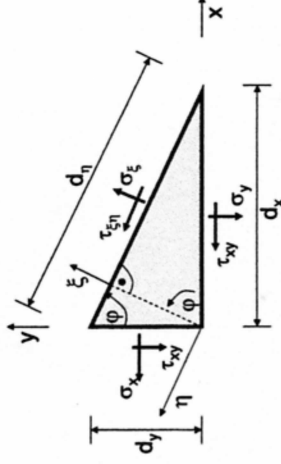
(E_1 und p_2 liegen in xy - Ebene)

Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/7

Der ebene Spannungszustand - Koordinatentransformation

- Problemstellung: Wie lassen sich bei Kenntnis von σ_x , σ_y und τ_{xy} die Spannungen in Schnitten berechnen, die gegenüber dem xy-System geneigt sind?
- Ableitung der Transformationsbeziehungen
 - Betrachtung eines infinitesimalen Elements und Einführung eines $\xi\eta$ -Koordinatensystems, dessen ξ -Achse senkrecht aus der zu untersuchenden Schnittfläche weist:



Dabei kennzeichnet φ den Winkel, um den die „neue“ Schnittfläche gegenüber dem „x-Schnitt“ geneigt ist

- Kräfte – Gleichgewicht in ξ und η – Richtung liefert (Dicke der Scheibe sei h):

$$\sum F_{\xi} = 0 = \sigma_{\xi} d\eta h - \sigma_x dy h \cos \varphi - \tau_{xy} dy h \sin \varphi - \sigma_y dx h \sin \varphi - \tau_{xy} dx h \cos \varphi$$

$$\sum F_{\eta} = 0 = \tau_{\xi\eta} d\eta h + \sigma_x dy h \sin \varphi - \tau_{xy} dy h \cos \varphi - \sigma_y dx h \cos \varphi + \tau_{xy} dx h \sin \varphi$$

Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/8

Der ebene Spannungszustand - Koordinatentransformation

➤ Unter Verwendung von $dx = d\eta \sin\varphi$ und $dy = d\eta \cos\varphi$ erhält man

$$\sigma_\xi = \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + 2\tau_{xy} \sin\varphi \cos\varphi \quad (9.6)$$

$$\tau_{\xi\eta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin\varphi \cos\varphi + \tau_{xy} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \quad (9.7)$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen lassen sich Normal- und Schubspannung in beliebig gedrehten Schnitten bestimmen, wenn man die Spannungen bezogen auf ein Ausgangssystem kennt.

- Üblicherweise wird zusätzlich die Spannung σ_η bestimmt, die in einem Schnitt wirkt, aus dem die η -Achse herausweist. Sie lässt sich aus σ_x , σ_y und τ_{xy} bestimmen, wenn man in (9.6) für φ den Wert $\varphi + \pi/2$ einsetzt.

Unter Ausnutzung der Additionstheoreme

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi), 2\sin\varphi \cos\varphi = \sin 2\varphi$$

erhält man die Spannungstransformationsbeziehungen für den ESZ in der gebräuchlichsten Form:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (9.8)$$

Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/9

Alternative Beschreibung der Koordinatentransformation für Spannungen

- Alternative Beschreibung der Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \underline{e}_\xi^T \underline{\sigma} \underline{e}_\xi \\ \sigma_\eta &= \underline{e}_\eta^T \underline{\sigma} \underline{e}_\eta \\ \tau_{\xi\eta} &= \underline{e}_\eta^T \underline{\sigma} \underline{e}_\xi \end{aligned} \quad (9.9)$$

Hinweis: der hochgestellte Index „t“ kennzeichnet den transponierten Vektor.

➤ Dass (9.9) und (9.8) identisch sind, sieht man wie folgt:

- Das jeweils zweite Produkt in den Gleichungen (9.9) d.h. $\underline{e}_\xi^T \underline{\sigma} \underline{e}_\xi$ (bzw. $\underline{e}_\eta^T \underline{\sigma} \underline{e}_\eta$) liefert den jeweiligen Spannungsvektor $\underline{t}_{(\xi)}$ (bzw. $\underline{t}_{(\eta)}$), der in einem Schnitt wirkt, der auf der ξ -Achse (bzw. η -Achse) senkrecht steht¹, z.B.

$$\begin{aligned} \underline{t}_{(\xi)} &= \underline{\sigma} \underline{e}_\xi = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \cos\varphi + \tau_{xy} \sin\varphi \\ \tau_{xy} \cos\varphi + \sigma_y \sin\varphi \end{pmatrix} \\ (\underline{t}_{(\eta)})_{\text{sinngemäss mit } \underline{e}_\eta} &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¹ häufig auch geschrieben als $\underline{t} = \underline{\sigma} \underline{n}$, wobei $\underline{n}$ der Normaleneinheitsvektor der Schnittfläche ist und $\underline{t}$ der in diesem Schnitt wirkende Spannungsvektor

Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/10

Alternative Beschreibung Koordinatentransformation für Spannungen

- Die entsprechenden Komponenten σ_x, σ_y und τ_{xy} erhält man dann durch Projektion von $\underline{t}_{(\xi)}$ (bzw. $\underline{t}_{(\eta)}$) auf $\underline{e}_x$ (bzw. $\underline{e}_y$) (=Skalarprodukt). Dies entspricht jeweils dem ersten Produkt in (9.9):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \underline{e}_x^T \underline{\sigma} \underline{e}_x = \underline{e}_x^T \underline{t}_x \\ &= (\cos \varphi \sin \varphi) \begin{pmatrix} \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi \\ \tau_{xy} \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= (\sigma_x \cos^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi) \quad (\sigma_x, \tau_{xy} \text{ sin gemäss})\end{aligned}$$

- ⇒ Ausmultiplikation des Skalarprodukts führt exakt auf Gleichung (9.6) (bzw. (9.7)), aus der sich dann wiederum die Beziehungen (9.8) ableiten lassen.
- (9.9) und (9.8) sind damit gleichwertig, was zu zeigen war!

- ⇒ Der Vorteil der Transformationsbeziehungen (9.9) liegt darin, dass sie sich leicht für allgemeine dreidimensionale Spannungszustände erweitern lassen (gedrehtes 3D-KO-System ξ, η, ζ):

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \underline{e}_\xi^T \underline{\sigma} \underline{e}_\xi, & \sigma_\eta &= \underline{e}_\eta^T \underline{\sigma} \underline{e}_\eta, & \sigma_\zeta &= \underline{e}_\zeta^T \underline{\sigma} \underline{e}_\zeta \\ \tau_{\xi\eta} &= \underline{e}_\xi^T \underline{\sigma} \underline{e}_\eta, & \tau_{\xi\zeta} &= \underline{e}_\xi^T \underline{\sigma} \underline{e}_\zeta, & \tau_{\eta\zeta} &= \underline{e}_\eta^T \underline{\sigma} \underline{e}_\zeta\end{aligned} \quad (9.10)$$

Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/12

Alternative Beschreibung Koordinatentransformation für Spannungen

- Dabei liefert das jeweils zweite Produkt (z.B. $\underline{\sigma} \underline{e}_\xi$) wieder den Spannungsvektor auf der entsprechenden Schnittfläche (z.B. $\underline{t}_{(\xi)}$) auf der Schnittfläche senkrecht zu $\underline{\xi}$, während das erste Produkt die Projektion des Spannungsvektors in die jeweilige Koordinatenrichtung vornimmt.
- An diesem Vorgehen sieht man gleichzeitig noch einmal die Notwendigkeit, warum die Komponenten des Spannungstensors 2-fach indiziert sind (es stehen in jeder Komponente 2 Richtungsinformationen: eine zur Orientierung der Schnittfläche und eine zur Richtung, in die der Spannungsvektor projiziert wird).
- Spannungstensoren sind damit Tensoren 2. Stufe (Vektoren sind Tensoren 1. Stufe), unabhängig davon, ob es sich um allgemeinen 3D-Spannungszustand oder um ESZ handelt.

Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/12

Graphische Durchführung der Koordinatentransformation für Spannungen – der Mohrsche Kreis

- Variiert man in den Transformationsbeziehungen (9.8) für einen bekannten ebenen Spannungszustand (gegeben durch $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) den Winkel φ und trägt die erhaltenen Wertepaare $\sigma (= \sigma_\xi), \tau (= \tau_{\xi\eta})$ in ein σ - τ -Koordinatensystem (die sogenannte Mohrsche Spannungsebene) ein, so stellt man fest, dass alle Punkte auf einem Kreis, dem sogenannten **Mohrschen Spannungskreis** liegen (nach Otto Mohr, 1835 – 1918). Der Mittelpunkt des Kreises liegt dabei stets auf der σ – Achse.

- Dies lässt sich zeigen, indem man die Transformationsbeziehungen (9.8) (mit $\sigma = \sigma_\xi$ und $\tau = \tau_{\xi\eta}$) wie folgt umstellt.

$$\sigma - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

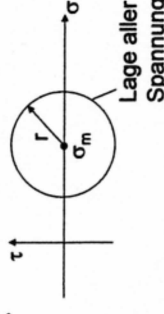
Quadrieren und Addieren eliminiert den Winkel φ :

$$\underbrace{\left(\sigma - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right)^2}_{:= \sigma_m^2} + \tau^2 = \underbrace{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}_{:= r^2}$$

Graphische Durchführung der Koordinatentransformation für Spannungen – der Mohrsche Kreis

Dies entspricht einer Kreisgleichung in der σ – Ebene (Mittelpunkt auf σ – Achse):

$$(\sigma - \sigma_m)^2 + \tau^2 = r^2$$



(σ_m und r sind dabei gewissermaßen Konstante, die den Mohrschen Kreis vollständig beschreiben.)

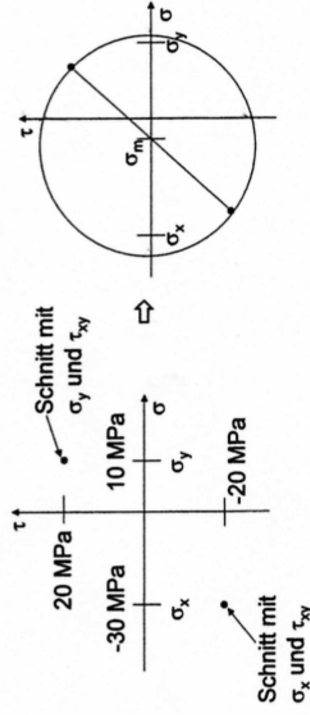
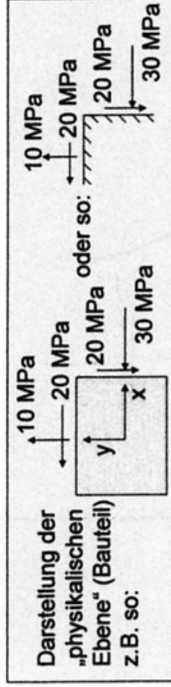
- Vorzeichenvereinbarung:

- Normalspannungen werden in der Mohrschen Spannungsebene positiv eingetragen, wenn sie in Richtung des Schnittnormalenvektors (d.h. aus der Schnittfläche heraus (=Zug)) weisen.
- Schubspannungen werden positiv eingetragen, wenn sie in Richtung des um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedrehten Normalenvektors zeigen. Achtung: Hieraus folgt unmittelbar, dass τ_{xy} über σ_x vorzeichenrichtig und über σ_y vorzeichenverkehrt eingetragen wird)



Graphische Durchführung der Koordinatentransformation für Spannungen – der Mohrsche Kreis

- Beispiel: Spannungszustand mit $\sigma_x = -30 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 10 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -20 \text{ MPa}$



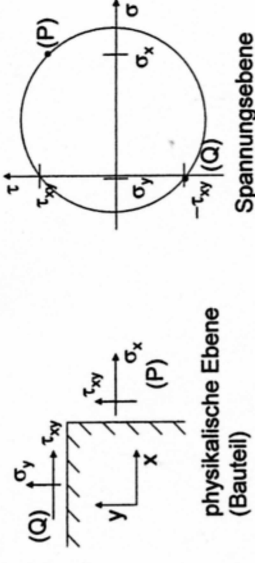
Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/15

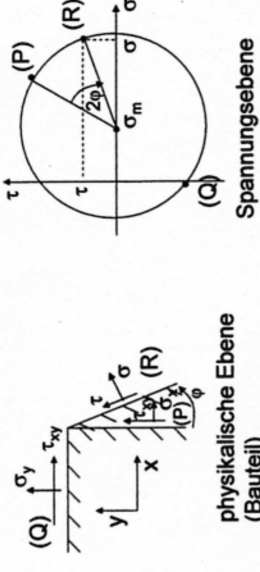
Graphische Durchführung der Koordinatentransformation für Spannungen – der Mohrsche Kreis

- Durchführung von Transformationen:

- Kennt man den Spannungszustand in einem Punkt (z.B. σ_x , σ_y , τ_{xy} bekannt) ...



- ... so erhält man die Spannungen σ und τ , die in der physikalischen Ebene in einem um den Winkel ϕ gedrehten Schnitt wirken, indem man in der Mohrschen Spannungsebene den entsprechenden Punkt um -2ϕ (d.h. doppelt so weit in der Gegenrichtung) um den Mittelpunkt des Mohrschen Kreises dreht (ohne Beweis):



Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/16

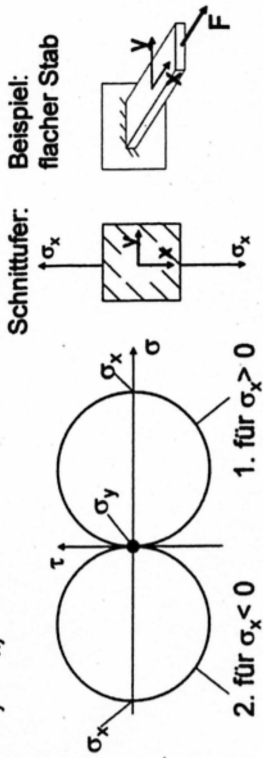
Graphische Durchführung der Koordinatentransformation für Spannungen – der Mohrsche Kreis

- aus der Betrachtung des Sonderfalls Drehung um 90° in der physikalischen Ebene (d.h. z.B. vom „x-Schnitt“ zum „y-Schnitt“) folgt demzufolge, dass sich der x- und y-Schnitt im Mohrschen Kreis genau gegenüber liegen ($= -180^\circ$ -Drehung in der Spannungsebene)
- folglich könnte man die Spannung im (R)-Schnitt auch bestimmen, wenn man im Mohrschen Kreis von Q aus um $180^\circ - 2\varphi$ (d.h. um $2 \cdot (90^\circ - \varphi)$) dreht, da dies in der physikalischen Ebene den geforderten $-(90^\circ - \varphi)$ entspricht.

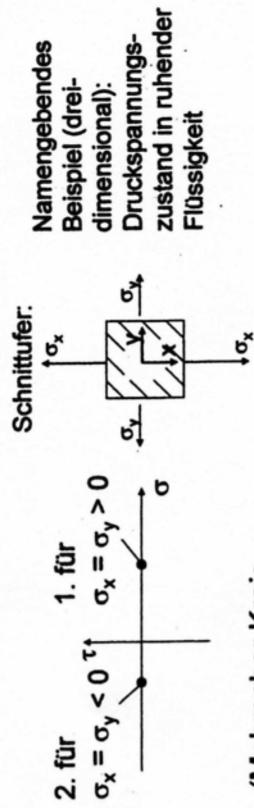
➤ Regel in Kurzform: Drehung des Schnittpunkts um den Winkel φ in der physikalischen Ebene entspricht Drehung um Winkel -2φ (d.h. 2φ in Gegenrichtung) im Mohrschen Kreis.

Der Mohrsche Kreis für Sonderfälle

- Einachsiger ebener Spannungszustand mit $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$



- Hydrostatischer Spannungszustand mit $\sigma_x = \sigma_y$, $\tau_{xy} = 0$



(Mohrscher Kreis entartet zu einem Punkt, d.h. in allen gedrehten Schnitten ist $\tau = 0$ und σ gleich)

Hauptspannungen und Haupttrichtungen

- Anhand des Mohrschen Kreises wird ersichtlich, dass es bestimmte Schnitttufer gibt, in denen die Normalspannung extreme Werte annimmt, wobei die Schubspannung in diesen Schnitten verschwindet:

Definitionen: Schnitttufer, in denen keine Schubspannung wirkt, heißen Hauptspannungtufer. Die dazugehörigen Normalenvektoren weisen in die Haupttrichtungen, die mit I, II und III bezeichnet werden. Die in den Hauptspannungtufern wirkenden Normalspannungen weisen entsprechend in die Haupttrichtungen und werden als Hauptspannungen σ_I , σ_{II} und σ_{III} bezeichnet. Die Nummerierung der Haupttrichtungen und Hauptspannungen erfolgt gemäß $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ (σ_I zeigt in I-Richtung usw.).

- Wie sich zeigen lässt, stehen die 3 Haupttrichtungen im dreidimensionalen Spannungszustand stets jeweils senkrecht aufeinander. Dies gilt auch für den Sonderfall ESZ, wo eine Haupttrichtung wegen $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ (und mit $\sigma_z = 0$) stets die z-Richtung ist. Dies wird im ESZ jedoch in der Regel nicht mitbetrachtet, so dass man hier oft nur von 2 Haupttrichtungen, die dann mit I und II bezeichnet werden, spricht*.

* auch im Falle der Konstellation $\sigma_I > \sigma_z = 0 > \sigma_{II}$ oder $\sigma_z = 0 > \sigma_I > \sigma_{II}$

Hauptspannungen und Haupttrichtungen

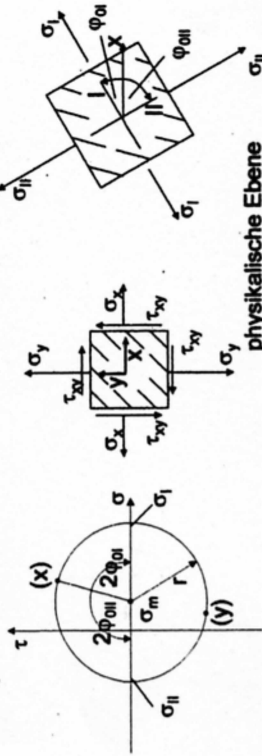
Sie stehen entsprechend (wie auch am Mohrschen Kreis ersichtlich) senkrecht aufeinander und liegen in der xy-Ebene.

- ⇒ Unter dieser Voraussetzung, d.h. der „Nichtmitbetrachtung“ von σ_z , ist im ESZ σ_1 die größte und σ_{II} die kleinste auftretende Normalspannung
- ⇒ Den Winkel zwischen x-Achse und I-Haupttrichtung bezeichnet man im ESZ mit φ_{0I} , den Winkel zwischen x-Achse und II-Haupttrichtung mit φ_{0II} .

• Definition: Ein parallel zu den Haupttrichtungen liegendes Koordinatensystem wird als **Hauptachsensystem** bezeichnet.

- Bestimmung der Hauptspannungen und Haupttrichtungen im Falle des ESZ:

- graphisch mit Hilfe des Mohrschen Kreises



Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/20

Hauptspannungen und Haupttrichtungen

- rechnerisch ergeben sich Hauptspannungen aus

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (9.11)$$

Dies lässt sich z.B. graphoanalytisch zeigen: (9.11) lässt sich (vgl. Herleitung Mohrscher Kreis) auch als $\sigma_{I,II} = \sigma_m \pm r$ schreiben, wobei σ_m den Mittelpunkt und r den Radius des Mohrschen Kreises bezeichnet.

Den Winkel zwischen Haupttrichtung und x-Achse erhält man aus

$$\tan 2\varphi_{0I,II} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (9.12)$$

Hinweis:

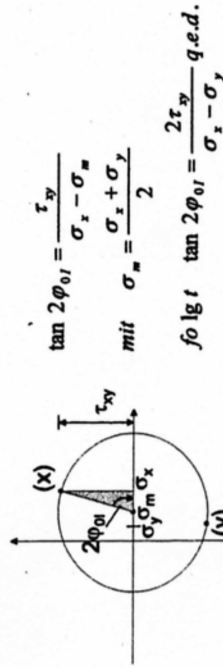
Die tan-Funktion ist 180° -periodisch, d.h. man erhält zwei um 180° auseinanderliegende Lösungen für $2\varphi_{0I,II}$, folglich zwei um 90° auseinanderliegende Lösungen für φ_{0I} und φ_{0II} . Welche der beiden Lösungen zur I- bzw. II-Richtung gehört, ermittelt man durch Einsetzen der mit (9.12) ermittelten Winkel in die Transformationsgleichungen (9.8), Zuordnung über $\sigma_I > \sigma_{II}$.

Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/21

Hauptspannungen und Haupttrichtungen

(9.12) lässt sich ebenfalls graphoanalytisch ableiten, hier am Beispiel φ_{01} :



Hinweis:

Alternative Herleitungen von (9.11) und (9.12) z.B. über Zinullsetzen von $\tau_{\zeta\eta}$ in (9.8) liefert (9.12), einsetzen des Winkels in die σ_ξ -Gleichung liefert (9.11). Ebenso lässt sich zeigen, dass $\varphi_{01,II}$ gemäß (9.12) die Gleichungen $\frac{d\sigma_\xi}{d\varphi} = 0$ und $\frac{d\sigma_y}{d\varphi} = 0$ erfüllt, die Normalspannungen mithin extremal macht.

Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/22

Hauptschubspannungen

- Definition: Die größten Schubspannungen, die ein Spannungszustand aufweist, bezeichnet man als **Hauptschubspannungen** $\tau_{\max}$.

> graphische Bestimmung der Hauptschubspannungen und der dazugehörigen Richtungen über den Mohrschen Kreis.

Hinweis:

Man erkennt anhand des Mohrschen Kreises, dass die Normalspannungen in den zu $\tau_{\max}$ gehörenden Schnitten in der Regel nicht Null sind.

> rechnerische Bestimmung

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (9.13)$$

Ableitung: $\tau_{\max}$ entspricht dem Radius r des Mohrschen Kreises.

Den Winkel $\varphi_{\max}$ zwischen der x-Achse und dem Normalenvektor des Schnitts, in dem τ maximal wird, erhält man aus

$$\tan 2\varphi_{\max} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (9.14)$$

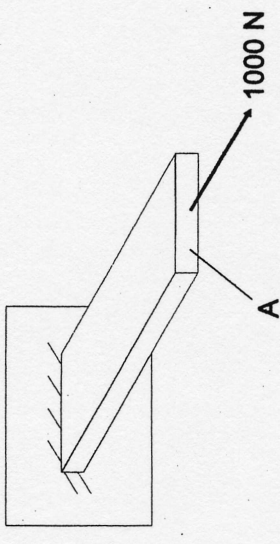
(Herleitung wieder graphoanalytisch oder über Auswertung von $\frac{d\tau_{\max}}{d(2\varphi)} = 0$ (aus (9.8)) möglich)

Technische Mechanik I
9. Der Spannungszustand

Prof. Dr.-Ing. J. Harder
9/23

Aufgabe 8-2

Ein einseitig fest eingespannter flacher Stab konstanter, rechteckiger Querschnittsfläche A werde durch eine Längskraft von 1000 N belastet.



Bestimmen Sie die Querschnittsfläche A so, dass die auftretenden Schubspannungen den zulässigen Wert von $\tau_{\text{zul}} = 20\text{ N/mm}^2$ nicht überschreiten.

Es soll von einem homogenen, ebenen Spannungszustand ausgegangen werden.

$$A_{\text{erf}} = 25\text{ mm}^2$$

Aufgabe 9-1

Der zu untersuchende Ort eines Bauteils sei durch einen ebenen Spannungszustand mit

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -20 & 15 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

belastet.

- Skizzieren Sie die Schnittrufer und die wirkenden Spannungen in der physikalischen Ebene!
- Zeichnen Sie den zugehörigen Mohrschen Kreis.
- Bestimmen Sie graphisch die Normal- und Schubspannungen in einem Schnitt (A), dessen Normalenvektor sich durch Drehung der x-Achse um 60° in mathematisch positive Richtung ergibt. Skizzieren Sie die Spannungen in der physikalischen Ebene.
- Bestätigen Sie das Ergebnis durch eine rechnerische Lösung.

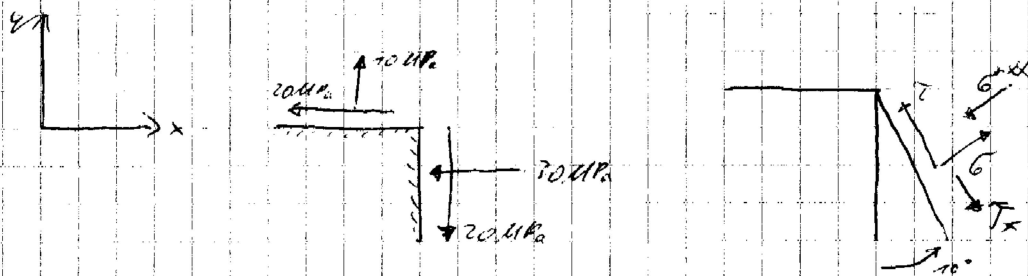
$$\sigma_A = 15,5 \text{MPa}, \quad \tau_A = 5,5 \text{MPa}$$

Beispiel: Gegeben sei ein gegebener Spannungszustand mit:

$$\sigma_x = -30 \text{ MPa} ; \sigma_y = 10 \text{ MPa} ; \tau_{xy} = -20 \text{ MPa}$$

$$\text{d.h.: } \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -30 & -20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

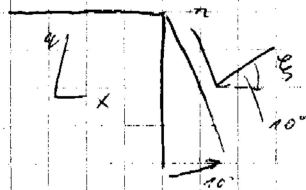
Gesucht ist die Spannung in einem um $\varphi = 20^\circ$ gegenüber dem x -Schnitt gedrehten Schnitt!



$$\tau = ?$$

$$\sigma = ?$$

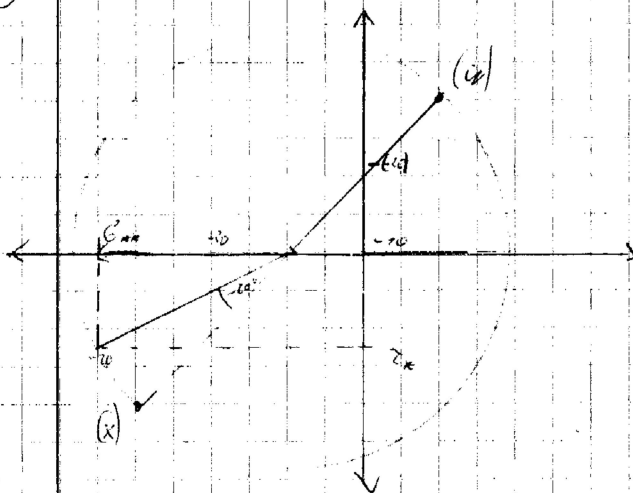
① rechnerische Lösung Definieren eines ξ - η -Koordinatensystemes:



$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{1}{2} \cdot (-30 + 10 \text{ MPa}) + \frac{1}{2} \cdot (-30 \text{ MPa} - 10 \text{ MPa}) \cdot \cos 20^\circ - 20 \text{ MPa} \cdot \sin 20^\circ = -35,63 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2} \cdot (-30 \text{ MPa} - 10 \text{ MPa}) \sin 20^\circ - 20 \text{ MPa} \cos 20^\circ = -17,96 \text{ MPa}$$

② Zeichnerische Lösung mit Mohr'schem Kreis



③ Rechnerische Lsg mit Gleichung 9.9

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sigma$$

$$l_{\xi\xi} = \begin{pmatrix} \cos 20^\circ \\ \sin 20^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9397 \\ 0,3420 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(\xi)} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{l}}_{\xi\xi} = \begin{pmatrix} -30 & -20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \text{ MPa} \cdot \begin{pmatrix} 0,9397 \\ 0,3420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35,63 \text{ MPa} \\ -17,96 \text{ MPa} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\sigma}}_{(\xi)}$$

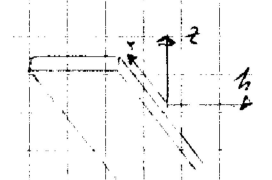
$$F_y = \begin{pmatrix} 0,5141 & 0,7736 \\ -35,67 & -72,16 \end{pmatrix} \cdot 11 \text{ kN}$$

$$z_{\text{max}} = \begin{pmatrix} -0,7236 \\ 0,9148 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -51,41 \\ -35,67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37,26 \\ -32,96 \end{pmatrix}$$

$$e^{\frac{z}{t}} = \begin{pmatrix} -0,7236 & 0,9148 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,7236 & 0,9148 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -51,41 \\ -35,67 \end{pmatrix} = -72,16 \text{ MPa}$$

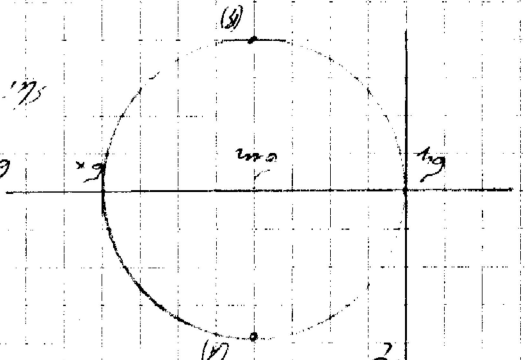
Aufgabe 9.2

1. Wahl eines geeigneten Koordinatensystems

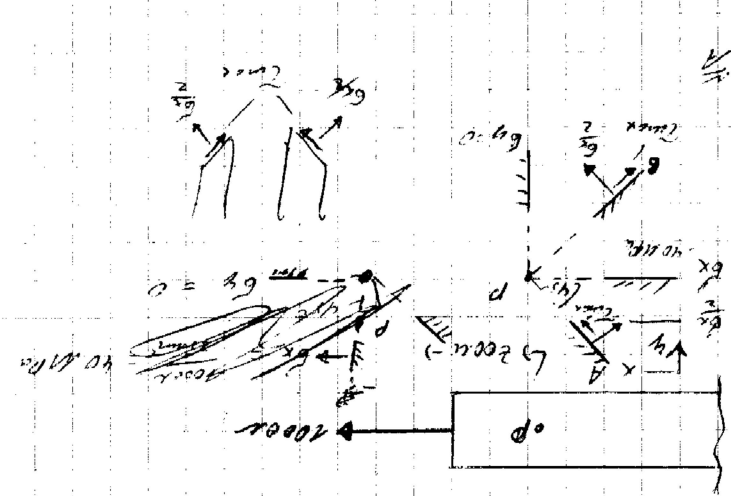


Dann wird $G_x = \frac{A}{\sqrt{2}}$
 $G_y = 0$
 $G_z = 0$

Zu einer nicht Lösung!



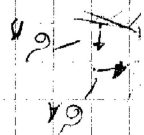
0° im Meridian Kreis = 45° in phys. Ebene



rechnerische Lig:

$$L_{\text{max}} = \sqrt{\left(\frac{G_x - G_y}{2}\right)^2 + G_z^2} = 500 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Absenwertpunkt: $\tau_{\text{max}} = \frac{z}{2} = 500 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
 Dimensionierung: $\tau_{\text{zul}} \leq 20 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
 d.h. $\frac{500}{20} \leq 25 \text{ mm} \Rightarrow A \geq \frac{500}{20} \text{ mm}^2 = 25 \text{ mm}^2$
 Kreis der schen. Knoten in der phys. Knoten Ebene

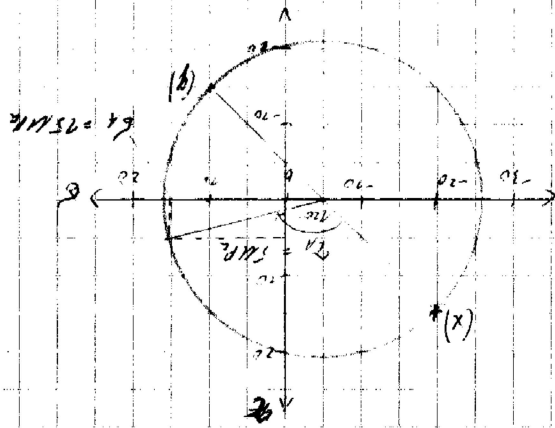
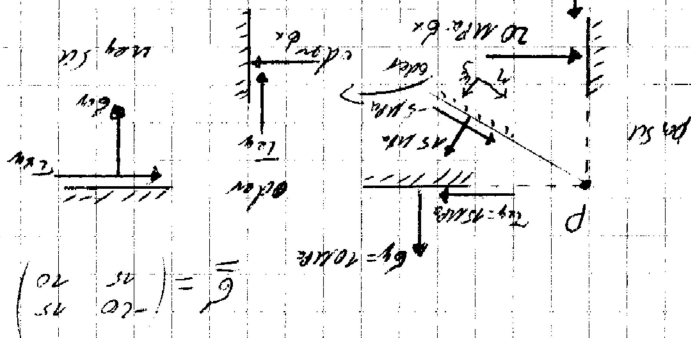


6/

Aufgabe 4-7

TM U

21.04.03



pos: 26.6° nur x -Klasse mit $\theta = 26.6^\circ$
 heißt hier ein θ was man
 dann positiv
 $\Rightarrow$ Mohr'sche Kreis
 $\theta = 26.6^\circ$

c) Transformations- und Gleichung (9.8) $\sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$
 $\sigma_x = \sigma_y = \frac{1}{2}(-20 \text{ kN} + 10 \text{ kN}) + \frac{1}{2}(-20 \text{ kN} - 10 \text{ kN}) \cos 72^\circ + 15 \text{ kN} \sin 72^\circ = 15.5 \text{ kN}$
 $\tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$
 $\tau_{xy} = \tau_{xy} = \frac{1}{2}(-20 \text{ kN} - 10 \text{ kN}) \sin 72^\circ + 15 \text{ kN} \cos 72^\circ = 5.1 \text{ kN}$